

Corrigé 7

Exercice 1. Montrer que la série $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{|k|!} z^k$ a pour anneau de convergence $A(0, \infty) = \mathbb{C}^*$.

Démonstration. La partie régulière de la série est

$$\sum_{k \geq 0} \frac{z^k}{k!},$$

qui a pour rayon de convergence ∞ . La partie singulière est donnée par

$$\sum_{k \geq 1} \frac{w^k}{k!},$$

où on a posé $w = 1/z$. Son rayon de convergence est ∞ également, et on en déduit que l'anneau de convergence de $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{|k|!} z^k$ est $A(0, \infty)$, comme annoncé. $\square$

Exercice 2. On considère la fonction

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}.$$

Trouver son développement en série de Laurent en 0 :

- dans le disque $|z| < 1$;
- dans la couronne $1 < |z| < 2$;
- dans la couronne $|z| > 2$.

Démonstration. Tout d'abord, notons que l'on peut séparer f en éléments simples ;

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{-1}{z-1} + \frac{1}{z-2}$$

- Sur le disque $|z| < 1$ on développe chaque élément simple en série géométrique :

$$\frac{-1}{z-1} + \frac{1}{z-2} = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-z/2} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (z/2)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{k+1}}\right) z^k$$

- dans l'anneau $1 < |z| < 2$, on va développer la deuxième fraction comme série géométrique, cependant pour la première on utilisera l'astuce :

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-1/z} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k-1} = \sum_{k=-1}^{-\infty} z^k$$

et cette série de Laurent converge quand $|1/z| < 1$ ie quand $|z| > 1$. En somme, en additionnant les deux séries évoquées plus haut, on obtient une série de Laurent avec anneau de convergence comme voulu :

$$f(z) = \sum_{k=-1}^{-\infty} -z^k + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-1}{2^{k+1}} z^k$$

Pour résumer, les coefficients sont : $a_k = -1$ quand $k \leq -1$ et $a_k = -2^{-k-1}$ sinon

- sur la couronne $|z| > 2$, on utilise l'astuce évoqué plus haut sur les deux séries :

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-1/z} = \sum_{k=-1}^{-\infty} z^k$$

et

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-2/z} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} 2^k z^{-k} = \sum_{k=-1}^{-\infty} 2^{-(k+1)} z^k$$

On se convainc que la deuxième série ci-dessus converge quand $|z| > 2$ et donc on aura

$$f(z) = - \sum_{k=-1}^{-\infty} z^k + \sum_{k=-1}^{-\infty} 2^{-(k+1)} z^k = \sum_{k=-1}^{-\infty} (2^{-(k+1)} - 1) z^k$$

□

Exercice 3. Trouver le développement en série de Laurent en 0 de la fonction

$$f(z) = \frac{z^2 - 2z + 5}{(z - 2)(z^2 + 1)}.$$

Démonstration. Notons que l'on peut facilement trouver une série de Laurent ou entière pour $\frac{-2}{1+z^2}$ en utilisant une série géométrique. Pour cette raison, on sépare notre fonction f en éléments simples, mais en gardant $z^2 + 1$ comme un des dénominateurs. En effet on aura :

$$\frac{z^2 - 2z + 5}{(z - 2)(z^2 + 1)} = \frac{-2}{z^2 + 1} + \frac{1}{z - 2}$$

Regardons maintenant les différentes séries de Laurent que l'on peut obtenir : f a des singularités en $i, -i$ et 2 . On aura alors le disque $|z| < 1$, l'anneau $1 < |z| < 2$ et la couronne $|z| > 2$. On procède de la même manière que dans l'exercice 1.

— sur $|z| < 1$:

$$f(z) = -2 \sum_{k=0}^{\infty} (-z^2)^k - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (z/2)^k$$

— sur l'anneau :

$$f(z) = \frac{-2}{z^2} \cdot \frac{1}{1 + z^{-2}} - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (z/2)^k = \frac{-2}{z^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-z^{-2})^k - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (z/2)^k$$

— sur la couronne :

$$f(z) = \frac{-2}{z^2} \cdot \frac{1}{1 + z^{-2}} + \frac{1}{z} \frac{1}{1 - 2/z} = \frac{-2}{z^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-z^{-2})^k + \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} 2^k z^{-k}$$

On obtient les séries de Laurent voulues sous la forme attendue en distribuant les éventuels facteurs devant chaque somme, puis en les combinant.

□

Exercice 4. Soit $a \in \mathbb{R}$. Calculer

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 - 2a \cos t + a^2}.$$

Démonstration. On a

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 - 2a \cos t + a^2} = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(e^{it} - a)(e^{-it} - a)} = \frac{1}{i} \oint \frac{dz}{(z - a)(1 - az)}.$$

Si $|a| < 1$ c'est la formule de Cauchy pour la fonction $\frac{2\pi}{1-az}$ en a et l'intégrale est donc $\frac{2\pi}{1-a^2}$. Si $|a| > 1$ c'est la formule de Cauchy pour la fonction $-\frac{2\pi}{a(z-a)}$ en $\frac{1}{a}$ et l'intégrale est donc encore $\frac{2\pi}{a^2-1}$.

Donc, pour tout $a \neq \pm 1$,

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 - 2a \cos t + a^2} = \frac{2\pi}{|a^2 - 1|}.$$

Puisque pour tout $t \in [0, 2\pi]$ on a

$$0 \leq 1 - \cos t \leq \frac{1}{2}t^2,$$

l'intégrale diverge quand $a = 1$ car

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 - \cos t} \geq \int_0^{2\pi} \frac{dt}{t^2} = \infty.$$

Similarly, since $0 \leq 1 + \cos t = 1 - \cos(t - \pi) \leq \frac{1}{2}(t - \pi)^2$, we have a non-integrable singularity at $t = \pi$ when $a = -1$. □

Exercice 5. Prouver que une fonction holomorphe $f : U \setminus \{z_*\} \rightarrow \mathbb{C}$ a un pôle d'ordre $N > 0$ en $z_* \in U$ si et seulement si N est le plus petit entier tel que $z \mapsto |z - z_*|^N |f(z)|$ soit bornée au voisinage de z_* .

Démonstration. On suppose $z^* = 0$. Supposons qu'il existe $r > 0$, un entier naturel N et un réel $M > 0$ tels que $|z|^N |f(z)| \leq M$ pour tout $z \in D(0, r)$. Par le Théorème 201, on a alors pour tout $0 < \epsilon < r$ et pour tout $k < -N$

$$\begin{aligned} |a_k| &= \frac{1}{2\pi} \left| \oint_{\partial D(0, \epsilon)} \frac{f(z)}{z^{k+1}} dz \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(\epsilon e^{it})|}{\epsilon^{k+1}} \epsilon dt \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{M}{\epsilon^{N+k}} dt = \frac{M}{\epsilon^{N+k}}. \end{aligned}$$

Puisque $k + N < 0$ et la borne est valide pour tous $0 < \epsilon < r$, on a que $a_k = 0$ et donc 0 est un pôle au plus d'ordre N . Since N is the minimal one such that $|z|^N |f(z)|$ is bounded near zero, zero is a pole of order exactly N .

Let us now prove the reciprocal statement : let f have a pole of order N at zero. Consider its Laurent series at $A(0, 0, R)$, where R is small enough so that the annulus is fully contained inside U : $f(z) = \sum_{k=-N}^{\infty} a_k z^k$. Obviously, $|z|^N |f(z)|$ is bounded near zero, while $|z|^{N-1} |f(z)| \geq |a_{-N}| |z|^{-1} - \sum_{k=0}^{\infty} |a_{k-N+1}| |z|^k$ goes to infinity when $|z|$ goes to zero as long as $a_{-N} \neq 0$. $\square$

Exercice 6. Soit U un domaine contenant z_* et $f : U \setminus \{z_*\}$ holomorphe. Montrer que si pour tout $N \geq 1$, la fonction $z \mapsto |z - z_*|^N |f(z)|$ n'est pas bornée au voisinage de z_* , alors f a une singularité essentielle en z_* .

Démonstration. A nouveau, on suppose $z^* = 0$. Supposons maintenant que 0 est un pôle d'ordre fini N . Il existe donc un $r > 0$ t.q. pour tout $z \in D(0, r)$

$$f(z) = \sum_{k=-N}^{\infty} a_k z^k,$$

et la fonction $z^N f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k-N} z^k$ peut être complétée en 0 en choisissant $z^N f(z)|_{z=0} = a_{-N}$. En particulier, elle est holomorphe et donc bornée dans un voisinage de 0, ce qui contredit l'hypothèse. Ainsi f ne peut avoir de pôle ni de singularité effaçable en 0 et doit donc y avoir une singularité essentielle, ce qui conclut la preuve.

Alternativement, on peut justifier qu'une fonction holomorphe avec une singularité en z_* a un développement en série de Laurent qui converge autour de z_* (voir remarque 205), et donc, par l'exercice précédent, puisque f n'a ni une singularité effaçable, ni une singularité polaire, elle a forcément une singularité essentielle. $\square$

Exercice 7. Montrer que si une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ a un pôle d'ordre N en z_* , alors

$$|f(z)| |z - z_*|^{N-1} \xrightarrow[z \rightarrow z_*]{\neq} +\infty.$$

Démonstration. Dans un voisinage de $z^* = 0$, on a

$$z^{N-1} f(z) = \sum_{k=-1}^{\infty} a_{k-N+1} z^k.$$

Comme la fonction entière $z^{N-1} f(z) - \frac{a_{-N}}{z} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k-N+1} z^k$ converge dans le même voisinage, elle converge aussi en 0. Elle est donc bornée dans le voisinage choisi et on a donc

$$|z^{N-1} f(z)| \geq \frac{|a_{-N}|}{|z|} - \left| \sum_{k=0}^{\infty} a_{k-N+1} z^k \right| \geq \frac{|a_{-N}|}{|z|} - M,$$

qui tend vers ∞ quand $z \rightarrow 0$, car $a_{-N} \neq 0$. $\square$

Exercice 8. Soit U un domaine et soit $z_* \in U$. Démontrer le théorème suivant (Casorati-Weierstrass) : Si une fonction holomorphe $f : U \setminus \{z_*\} \rightarrow \mathbb{C}$ a une singularité essentielle en z_* , alors pour tout $w \in \mathbb{C}$, il existe une suite $(z_n)_n$ avec $z_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} z_*$ telle que

$$f(z_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} w.$$

Démonstration. Supposons qu'il existe $r > 0$ et $w \in \mathbb{C}$ t.q. $|f(z) - w| \geq r$ pour tous z dans un voisinage de z^* . On considère donc la fonction $g(z) = \frac{1}{f(z)-w}$ qui est bornée dans ce voisinage de z^* et donc admet un prolongement en z^* . Comme f est non-bornée dans un voisinage de z^* , on a forcément $g(z^*) = 0$. La fonction g ayant donc un zéro d'ordre fini en z^* , on en déduit que $f(z) = \frac{1}{g(z)} + w$ a un pôle de même ordre en z^* , ce qui contredit l'hypothèse que la singularité est essentielle. $\square$