

1.  $2n + 1$  pierres, telles que si on retire une pierre du lot, on peut partager le reste en deux tas de  $n$  et  $n$  pierres de poids totaux égaux.
  - (a) Indice: poser un système avec  $2n + 1$  inconnues  $x_1, \dots, x_{2n+1}$ , écrire sous forme matricielle les  $2n + 1$  conditions qu'on a, utiliser un argument de rang.
2.  $N$  nains avec des chapeaux de couleurs parmi  $\{1, \dots, N\}$  (avec répétitions possibles), qui doivent essayer de deviner leur propre couleur de chapeau en voyant seulement les couleurs des autres. Stratégie pour qu'au moins un trouve sa propre couleur de chapeau ?
  - (a) Indice: travailler sur le groupe additif  $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ , utiliser qu'une fonction  $f : S \rightarrow S$  sur un ensemble fini  $S$  est injective si et seulement et seulement si elle surjective.
3.  $N$  nains avec des chapeaux de deux couleurs possibles, qui doivent essayer de deviner leur propre couleur de chapeau en voyant seulement les couleurs des autres. Stratégie pour qu'ils soient tous tort, soit tous raison simultanément. Bonus:  $N = +\infty$ 
  - (a) Indice: trouver comment faire avec  $N = 2$ , puis  $N = 3$ , continuer par récurrence. Pour le bonus: axiome du choix.
4. Deux enveloppes, l'une avec un montant  $\alpha$ , l'autre montant  $2\alpha$ . On ouvre l'une au hasard, on voit le montant dedans (sans connaître  $\alpha$ ). On doit décider de soit garder l'enveloppe, soit prendre l'autre. Comment faire mieux que le choix de toujours garder ?
  - (a) Indice: si on garde toujours, on gagne en espérance  $\frac{3}{2}\alpha$ . Si on prend une stratégie aléatoire en fonction de ce qu'on voit dans l'enveloppe (à déterminer), on peut faire  $> \frac{3}{2}\alpha$ .
  - (b) Réponse: on choisit une fonction strictement croissante  $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow [0, 1]$ , par exemple  $1 - \frac{1}{1+x}$ . Si  $x$  est le montant qu'on voit dans la première enveloppe, on décide de la garder avec probabilité  $1 - \frac{1}{1+x}$  (c'est-à-dire: on prend une variable uniforme  $U[0, 1]$  et si elle donne quelque chose  $\leq 1 - \frac{1}{1+x}$ , on garde l'enveloppe). Avec probabilité  $\frac{1}{2}$ , on ouvre l'enveloppe avec  $\alpha$ , et on garde avec probabilité  $1 - \frac{1}{1+\alpha}$ , et le gain espéré dans ce cas est  $1 - \frac{\alpha}{1+\alpha} + 2\alpha \frac{\alpha}{1+\alpha}$ . Avec probabilité  $\frac{1}{2}$ , on ouvre l'enveloppe avec  $2\alpha$ , et dans ce cas, le gain espéré est  $1 - \frac{2\alpha}{1+2\alpha} + \alpha \left( \frac{2\alpha}{1+2\alpha} \right)$ . Si on calcule l'espérance totale, on trouve
 
$$\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\alpha}{1+\alpha} + 2\alpha \frac{\alpha}{1+\alpha} \right) + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{2\alpha}{1+2\alpha} + \alpha \left( \frac{2\alpha}{1+2\alpha} \right) \right) > \frac{3}{2}\alpha$$
5. Couper un carré en quatre morceaux, permuter cycliquement les quatre morceaux. Pour chacun des quatre morceaux, les couper eux-mêmes en

quatre, et permuter cycliquement ces quatre sous-morceaux. Répéter à chaque échelle. Qu'obtient-on ?

- (a) Indice: on obtient une rotation de 90 degrés. Pour le montrer, montrer que c'est vrai pour une classe de points dense dans le carré et montrer que la limite de cette opération est continue.

6. Une suite infinie de nains sur les entiers  $\mathbb{N}$ , avec des chapeaux noirs ou blancs. Chaque nain voit les couleurs des nains devant lui et doit deviner sa propre couleur de chapeau. Comment faire (en utilisant l'axiome du choix) pour qu'au plus un nombre fini de nains se trompent ?

- (a) Indice: considérer la relation d'équivalence sur les suites de  $\mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$  qui dit que  $(a_k) \sim (b_k)$  si  $\{k \in \mathbb{N} : a_k \neq b_k\}$  est un ensemble fini.
- (b) Soit  $\mathcal{S}$  l'ensemble des suites  $\mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$  et  $\mathcal{E}$  l'ensemble quotient  $\mathcal{S}/\sim$  avec  $(a_k) \sim (b_k)$  si  $\#\{k \in \mathbb{N} : a_k \neq b_k\} < \infty$ . Soit  $\mathcal{R} \subset \mathcal{S}$  une collection de représentants (aussi appelée une section) de  $\mathcal{E}$ , c'est-à-dire telle que pour toute suite  $(a_k)_k \in \mathcal{S}$ , il existe une unique suite  $(r_k)_k \in \mathcal{R}$  telle que  $(a_k)_k \sim (r_k)_k$ . Les nains conviennent d'un tel  $\mathcal{R} \subset \mathcal{S}$  et procèdent ainsi: chaque nain  $k \in \mathbb{N}$  voit les chapeaux devant lui, et il parvient donc à identifier dans quelle classe d'équivalence la suite des chapeaux des nains se trouve (il ignore seulement un nombre fini de chapeaux [le sien et ceux derrière lui]) et il prédit que sa couleur est  $r_k$ . Par définition,  $r_k$  ne diffère de la vraie suite des couleurs qu'en un nombre fini d'indices.
- (c) Mais que se passerait-il si les chapeaux étaient mis sur les têtes des nains de manière aléatoire, indépendante (avec des lancers de pièces de monnaie)? Chaque nain aurait une chance sur deux de se tromper, et donc si  $T_N$  est le nombre de nains parmi les  $N$  premiers qui se trompent on devrait avoir, par la loi forte des grands nombres  $T_N/N \rightarrow \frac{1}{2}$  (presque sûrement). Mais alors  $T_N \sim \frac{N}{2}$  ne peut pas rester borné quand  $N \rightarrow +\infty$ , donc avec probabilité 1, un nombre infini de nains se trompent. Comment expliquer le paradoxe ?

7. Quatre fourmis aux quatre coins d'un carré de 1m: A s'approche de B, B de C, C de D, D de A, à 1m par minute. Combien de temps avant la réunion?

- (a) Indice: poser le problème mathématiquement, et calculer la dérivée de la distance entre les fourmis, montrer que ça vaut la vitesse, et intégrer la dérivée.

8. Comment, en prenant deux cordes non nécessairement homogènes qui brûlent en 1 heure chacune, mesurer 45 minutes ?

- (a) Indice: impossible de donner un indice sans trivialisier le problème.

- (b) Réponse: si on prend une corde et qu'on allume les deux bouts simultanément, elle brûle en 30 minute (même si elle est inhomogène). Du coup, pour avoir quarante-cinq minutes: on allume un bout d'une corde, les deux bouts de l'autre et quand l'autre a fini de brûler, on allume le deuxième bout de la première corde. Quand la première corde a brûlé, on a 45 minutes.
9. Comment, si on a une pièce de monnaie possible biaisée (mais on ne connaît pas le biais), faire un tirage avec probabilités  $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$ ?
- (a) Indice: attendre de trouver trois "motifs" dans l'ensemble des suites qui ont probabilités égales.
- (b) On lance la pièce trois fois. Si on a PFF, FPF, ou FFP on retourne 1, 2 ou 3. Sinon, on recommence (on relance la pièce trois fois, etc.). Note: on a quand même supposé que la pièce de monnaie ne change pas dans le temps.
10. On a une fourmi qui se déplace sur  $\{0, 1, \dots, N\}$  avec la règle suivante: à chaque étape, elle va au hasard à gauche ou à droite avec probabilités  $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ . Si elle part du point  $k$ , quelle est la probabilité d'atteindre  $N$  avant d'atteindre 0?
- (a) Indice: algèbre linéaire.
- (b) Posons  $f_N(k)$  cette probabilité, à regarder en fonction de  $k$ .
- (c) Cas plus faciles. Si par exemple  $N = 2$ , clairement  $f_2(0) = 0$ ,  $f_2(2) = 1$ ,  $f_2(1) = \frac{1}{2}$ . Si  $N = 4$ , on a  $f_4(0) = 0$ ,  $f_4(4) = 1$ ,  $f_4(2) = \frac{1}{2}$  (symétrie),  $f_4(1) = \frac{1}{2}0 + \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$  (si on va à gauche, on a "perdu", si on va à droite, on a une chance sur deux de "gagner", vu que  $f_4(2) = \frac{1}{2}$ ). Par symétrie,  $f_4(3) = \frac{3}{4}$ . Si  $N = 8$ , on déduit par le même genre d'arguments  $f_8(k) = \frac{k}{8}$ . Donc on a l'intuition que  $f_N(k) = \frac{k}{N}$ . Maintenant... pourquoi est-ce vrai ? Ce qu'on a avec la fonction  $f_N(k)$ , c'est qu'on peut la voir ainsi: avec probabilité  $\frac{1}{2}$ , on saute sur  $k - 1$ , avec probabilité  $\frac{1}{2}$ , on saute sur  $k + 1$ . On obtient

$$f_N(k) = \frac{1}{2}f_N(k+1) + \frac{1}{2}f_N(k-1)$$

On a ainsi  $N-1$  équations linéaires pour chacun des  $k = 1, \dots, N-1$ , et on a  $N-1$  inconnues (les valeurs de bord  $f_N(0) = 0$  et  $f_N(N) = 1$  sont connues)... clairement  $f_N(k) = k/N$  est une solution, on aimerait savoir si elle est unique. Il suffit du coup prouver que l'équation homogène  $x_k = \frac{1}{2}x_{k+1} + \frac{1}{2}x_{k-1}$  avec  $x_0 = x_N = 0$  n'a qu'une solution, la solution nulle. Supposons qu'il y ait une solution non nulle  $\tilde{x}$  et montrons que c'est impossible. Si  $\tilde{x}$  est non nulle, elle a forcément soit un minimum  $< 0$  soit un maximum  $> 0$  soit les deux. Si elle a minimum  $< 0$  atteint en  $j \in \{1, \dots, N-1\}$ , on aura une contradiction: en ce point  $x_j$  est égale à la moyenne de

$x_{j-1}$  et  $x_{j+1}$ . Mais comme c'est un minimum,  $x_{j-1} = x_j = x_{j+1}$  est la seule solution. Mais du coup  $x_{j-1}$  est aussi un minimum, et donc  $x_{j-1} = x_{j-2}$ , et ainsi de suite, ce qui impliquerait  $x_0 < 0$ . Or  $x_0 = 0$  par hypothèse, donc c'est une contradiction et on ne peut pas avoir de minimum  $< 0$ . Pour la même raison, on ne peut pas avoir de maximum  $> 0$ . Du coup  $x \equiv 0$  est la seule solution, du coup le système homogène est non dégénéré et  $f_N(k) = k/N$  car c'est la seule solution du système inhomogène.

11. Une princesse a  $N = 100$  prétendants. Chaque prétendant a un "score" différent. Parmi eux, il y a le prince charmant, qui a le score maximal. La princesse rencontre dans un ordre aléatoire les prétendants. Pour chaque prétendant, elle doit décider soit de l'épouser, soit de le rejeter (et si elle le rejette, elle ne peut plus revenir en arrière). Elle peut comparer le score du prétendant qu'elle voit aux scores des prétendants qu'elle a déjà rejetés, mais ne sait pas autrement reconnaître le prince charmant. Elle veut maximiser sa chance d'épouser le prince charmant (si elle arrive au bout de la liste des  $N$  prétendants, elle doit se marier avec le dernier).
  - (a) Comment trouver une stratégie qui assure une chance  $\geq \frac{1}{4}$  de se marier avec le prince charmant ?
    - i. Réponse: elle décide de rejeter les  $N/2$  premiers prétendants et de se marier avec le premier parmi les  $N/2$  derniers qui est mieux que les  $N/2$  premiers prétendants (s'il existe). Cette stratégie a probabilité  $\geq \frac{1}{4}$  de fonctionner, car la chance que le dauphin (le prétendant qui est juste en dessous du prince charmant) soit dans le  $N/2$  premiers est  $\frac{1}{2}$  et la chance que le prince charmant soit dans les  $N/2$  derniers est  $\frac{1}{2}$  aussi. Comme les deux événements sont (presque) indépendants ( $N$  assez grand) la probabilité qu'ils se produisent les deux est  $\approx \frac{1}{4}$  et dans ce cas de figure la princesse trouve en effet le prince charmant.
  - (b) Quelle est la stratégie optimale ? (Indice: elle donne une chance  $> 36\%$ ) (Indice: la stratégie n'est pas compliquée du tout).
    - i. Stratégie: la princesse laisse tomber les  $x$  premiers prétendants et se marie avec le premier qui est mieux que ces  $x$  prétendants (s'il existe). En fonction de  $x$ , quelle est la probabilité  $P(x)$  de trouver le prince charmant?
    - ii. Observation: si on regarde la suite des *rangs relatifs* des prétendants au moment où la princesse les rencontre, elle forme une suite dans

$$\{1\} \times \{1, 2\} \times \{1, 2, 3\} \times \cdots \times \{1, 2, \dots, N\}.$$

Par symétrie du problème, chaque suite de ce type est équiprobable et a une chance  $\frac{1}{N!}$  de se produire.

- iii. Dans le cas où la princesse se marie avec le prince charmant, les rangs relatifs à partir de  $x$  doivent ressembler à cela: il y a un moment  $p > x$  où elle voit le prince charmant (qui a donc rang relatif 1) et ensuite, si elle continuait l'expérience, elle ne verrait que des rangs relatifs  $> 1$ .
- iv. Quelle est la probabilité que cela se produise pour le prétendant  $p$ ?

$$\frac{x}{x+1} \frac{x+1}{x+2} \cdots \frac{p-2}{p-1} \frac{1}{p} \frac{p}{p+1} \frac{p+1}{p+2} \cdots \frac{n-1}{n} = \frac{x}{n(p-1)}$$

- v. Maintenant, il faut sommer sur tous les  $p > n$  possibles. Donc on calcule

$$\begin{aligned} \sum_{p=x+1}^n \frac{x}{n(p-1)} &= \frac{x}{n} \sum_{p=x+1}^n \frac{1}{p-1} \\ &= \frac{x}{n} \sum_{p=x}^{n-1} \frac{1}{p} \\ &\approx \frac{x}{n} (\log(n-1) - \log(x)) \\ &= \frac{x}{n} \log \frac{n-1}{x} \approx \frac{x}{n} \log \frac{n}{x} \\ &= -\alpha \log \alpha, \end{aligned}$$

où  $x/n = \alpha$  est la fraction des prétendants que la princesse élimine d'emblée.

- vi. Comment optimiser par rapport à  $\alpha \in [0, 1]$ ? Cette fonction fait 0 en 0 et en 1, est positive entre deux... Pour trouver son max, on dérive, on trouve  $-\log \alpha - 1$ . Pour que la dérivée fasse 0, il faut  $\alpha = \frac{1}{e} \approx 37\%$ . Et la valeur de la probabilité en  $\alpha = \frac{1}{e}$ , est  $-\frac{1}{e} \log \left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \approx 37\%$ .
12. On a une liste chaînée d'éléments,  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , où on ne connaît pas  $n$  (mais on sait que la liste est finie). Quand on est à  $x_0$  on a un pointeur pour aller à  $x_1$ , qui amène à  $x_2$ , etc, jusqu'au moment où on arrive à  $x_n$ , où on apprend que c'est la fin. On a une quantité de mémoire bornée (on peut pas juste stocker toute la liste dans un tableau et choisir un élément dans la tableau quand on est arrivé à la fin).
- (a) Comment prendre un élément aléatoire dans la liste, uniformément si on a le droit de parcourir la liste une seule fois ?
- (b) Pourquoi est-ce que résoudre ce problème peut être utile en pratique ?
13. On a 100 mathématiciens emprisonnés dans une salle. Ils ont été capturés par un sorcier qui va les soumettre à l'épreuve suivante.

- Il y a une autre salle avec 100 boîtes (alignées de gauche à droite quand on entre), où sont distribuées des plaquettes avec les noms des mathématiciens (chaque nom apparaît sur une plaquette qui est dans une boîte; chaque boîte une plaquette).
  - Les mathématiciens sont appelés l'un après l'autre dans la salle. Chaque mathématicien a le droit d'ouvrir 50 boîtes. S'il ne trouve pas son propre nom dans ces 50 boîtes, tous les mathématiciens sont tués. Sinon, il sort de la salle et va dans une troisième salle, toutes les boîtes sont refermées et laissées comme avant et c'est au suivant d'entrer et de devoir faire la même chose.
- (a) Comment trouver une stratégie qui permet de garantir avec probabilité  $\geq 30\%$  la survie des mathématiciens ? Ils ont le droit de se mettre d'accord sur une stratégie pendant qu'ils sont dans la première salle.
14. On a vingt-cinq chevaux (qu'on sait distinguer) qui ont tous des vitesses différentes. A chaque course, on peut en faire courir 5 en parallèle et observer dans quel ordre ils arrivent. On veut trouver quels sont les 3 les plus rapides (et le classement des 3). Les chevaux ne se fatiguent pas. Quel est le nombre minimum de courses requis ?
15. On a douze pièces de monnaie, avec 11 qui ont le même poids, et une qui pèse un poids différent des autres [mais on ne sait pas si plus petit ou plus grand]. On a une balance qui permet de comparer ce qu'on met sur le plateau gauche de ce qu'on met sur le plateau droit. Combien de pesées sont nécessaires au minimum pour identifier la pièce ?
16. Il y a une île avec 1000 habitants, dont 900 ont les yeux bruns et 100 les yeux bleus. Chaque habitant voit les yeux des autres (évidemment) mais ne connaît pas la couleur de ses propres yeux: il y a une loi sur l'île que si un habitant devait un jour connaître avec certitude la couleur de ses propres yeux, il devrait s'exiler la nuit qui suit cette découverte. Evidemment, les habitants ne savent pas qu'il y a exactement 900 habitants avec les yeux bruns et 100 avec les yeux bleus: ceux avec les yeux bruns voient 899 habitants avec les yeux bruns et 100 avec les yeux bleus, et ceux avec les yeux bleus voient 900 avec les yeux bruns et 99 avec les yeux bleus. Un jour un visiteur (avec les yeux verts, disons) arrive sur l'île et, sans être au courant des lois de l'île, donne un discours devant tous les habitants, où il mentionne le fait que c'était la première fois qu'il voyait des hommes avec des yeux bleus. Que va-t-il se passer ?
- (a) Réponse paresseuse: rien. Il n'a rien dit que les habitants ne sachent déjà.
- (b) Réponse étrange: après 100 jours, les habitants avec les yeux bleus s'exilent tous simultanément, suivis, le jour suivant des habitants avec les yeux bruns.

- i. Pour comprendre cette réponse, il faut raisonner par récurrence sur le nombre d'habitants avec les yeux bleus. Si ce nombre était 1, le jour du discours du visiteur, cet habitant se rendrait compte qu'il a les yeux bleus (vu qu'il ne voit personne d'autre). Et ainsi, il s'exilerait le soir même. Le lendemain soir, tous les autres habitants s'exileraient aussi (car il réaliseraient qu'ils ont les yeux bruns – si un seul d'entre eux avait eu les yeux bleus, celui qui s'est exilé la veille ne se serait pas exilé, car il aurait pu croire qu'on ne parlait pas de lui). Si ce nombre était 2, rien ne se passerait la première nuit (il y aurait 2 habitants avec les yeux bleus, qui pourraient tous deux penser que potentiellement le visiteur parlait de l'autre avec les yeux bleus). Mais la deuxième nuit, ils s'exileraient tous deux (en pensant: "vu que l'autre ne s'est pas exilé, quelqu'un d'autre doit avoir les yeux bleus, cela ne peut être que moi"); la nuit suivante, tout le reste de la tribu s'exilerait. Si ce nombre était 3, rien ne se passerait la première et rien ne se passerait la deuxième nuit. Mais alors, pour chacun des 3 habitants avec les yeux bleus (qui voient 2 autres habitants avec les yeux bleus), la conclusion est que forcément quelqu'un d'autre que ces deux a les yeux bleus), et donc ils s'exilent la troisième nuit... et ainsi de suite.
- ii. Question pour réfléchir: au fond, en quoi cela contredit-il la réponse paresseuse, selon laquelle aucune information n'a été ajoutée ?

On suppose dans cette énigme que tous les habitants raisonnent logiquement et savent que les autres raisonnent logiquement (et obéissent aux lois).

17. On définit la transformation suivante (Burrows-Wheeler): pour une chaîne de caractères  $S$  de longueur  $L$ , soient  $S_0 = S, S_1, S_2, \dots, S_{L-1}$  les rotations circulaires de la chaîne (exemple

*ANALYSE*  
*NALYSEA*  
*ALYSEAN*  
*LYSEANA*  
*YSEANAL*  
*SEANALY*  
*EANALYS*

et soit  $BW(S)$  la chaîne obtenue en classant alphabétiquement les rota-

tions, et en prenant les derniers caractères de ces rotations ordonnées

ALYSEAN  
 ANALYSE  
 EANALYS  
 LYSEANA  
 NALYSEA  
 SEANALY  
 YSEANAL

BW(S)=NESAAYL.

- (a) Expliquer pourquoi la transformation  $S \rightarrow BW(S)$  est une transformation inversible si on connaît le dernier caractère et que c'est un caractère qui n'apparaît nulle part ailleurs (E ici, un caractère spécial en général).
  - (b) Expliquer pourquoi si on prend un texte français long (disons)  $S$ , on aura tendance dans  $BW(S)$  à voir des suites de caractères identiques (donc cette suite est beaucoup plus facile à compresser).
18. On modélise l'arrivée d'e-mails dans une boîte mail comme un processus de Poisson avec paramètre  $\lambda = 15$  min. Un processus de Poisson (sur  $[0, \infty)$ ) avec paramètre  $\lambda$ : on attend un temps  $\text{Exp}(\lambda)$  et on place le premier point  $x_1 \in [0, \infty)$ , à partir de ce point, on attend un temps  $\text{Exp}(\lambda)$  indépendant  $y_2$  et on place un deuxième point  $x_2 = x_1 + y_2$ , on prend un autre temps  $\text{Exp}(\lambda)$  indépendant  $y_3$  et on place un troisième point  $x_3 = x_2 + y_3$ , etc. Problème à résoudre: on va vérifier son e-mail trop souvent. Pour Noël, on reçoit un raspberry pi avec un haut parleur qui a accès à notre e-mail. Il peut être programmé pour sonner en fonction de l'état de la boîte mail. Si le raspberry sonne dès qu'on reçoit un e-mail, on va vérifier sa boîte mail en moyenne 4 fois par heure. Notre contrainte: si (avec les informations dont dispose), on a plus que 50% de chances d'avoir reçu un e-mail, on se sent obligé d'aller voir son e-mail.
  - Comment utiliser le raspberry pour réduire drastiquement notre fréquence de consultation d'e-mail?
1. [Je ne connais pas la réponse de celle-là] Il y a 2 mathématiciens  $M_1, M_2$  et un sorcier. On a un échiquier avec  $n$  cases, et sur chaque case, le sorcier pose une pièce de monnaie, tournée côté pile ou côté face.  $M_1$  entre dans la salle avec l'échiquier et le sorcier. Le sorcier montre une case de l'échiquier de son choix à  $M_1$ .  $M_1$  a le droit de tourner au plus une pièce de l'échiquier, puis doit sortir de la salle.  $M_2$  entre dans la salle et doit deviner quelle case a été pointée par le sorcier.  $M_1$  et  $M_2$  ont le droit

de convenir d'une stratégie avant d'entrer dans la salle. Quelle stratégie choisir ? Pour quelles valeurs de  $n$  existe-t-il une stratégie qui fonctionne à tous les coups ?

2. On a  $n$  mathématiciens enfermés dans  $n$  chambres. Toutes les minutes, un mathématicien est tiré au hasard de manière uniforme et indépendante (répétitions possibles) et est amené dans une salle (la même salle pour tous les mathématiciens) qui contient une lampe et un interrupteur qui contrôle la lampe (l'état initial de l'interrupteur est inconnu). Il peut changer s'il le souhaite l'état de l'interrupteur et c'est tout (on ne peut pas casser des choses dans la salle, etc.). Si à un moment un des mathématiciens dit 'on a fini' il se produit la chose suivante:
- Si chaque mathématicien est passé au moins une fois dans la salle, ils sont tous libérés.
  - Sinon, ils sont tous tués.

Avant le début de l'épreuve, les mathématiciens peuvent convenir d'une stratégie. Que faire ?