- Pour les questions avec vrai/faux, il est demandé de *justifier* vos assertions.
- Par exemple, si vous dites qu'une fonction est bijective, il est *impératif* que vous expliquiez *pourquoi* (ou que vous disiez que ça a été vu en cours, ou que c'est évident (si c'est vraiment le cas)).
- On note $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\backslash\{0\}$, $D(z,\epsilon) = \{w \in \mathbb{C} : |w-z| < \epsilon\}$, $\overline{D}(z,\epsilon) = \{w \in \mathbb{C} : |w-z| \leq \epsilon\}$, $\mathbb{D} = D(0,1)$, $\overline{\mathbb{D}} = \overline{D}(0,1)$, $\partial\mathbb{D} = \bar{\mathbb{D}}\backslash\mathbb{D}$, $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$, $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ et $\mathbb{R}_+^* = \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}^*$.
- On rappelle qu'un réseau $\Lambda \subset \mathbb{C}$ est un ensemble de la forme $\{m\mu + n\nu : m, n \in \mathbb{Z}\}$ pour $\mu, \nu \in \mathbb{C}^*$, $\mu/\nu \notin \mathbb{R}$.

1. Soit $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Alors on a

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{2\pi} f\left(e^{it}\right) e^{-int} \mathrm{d}t = \lim_{n \to -\infty} \int_0^{2\pi} f\left(e^{it}\right) e^{-int} \mathrm{d}t = 0.$$

Si vrai, prouvez-le, si faux, donnez un contre-exemple.

Vrai. Pour une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}^*$, on a qu'elle est donnée par une série de Laurent $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$; on voit (soit en utilisant la formule vue en classe, soit directement) que $\int_0^{2\pi} f\left(e^{it}\right) e^{-int} \mathrm{d}t$ donne le coefficient a_n. Comme la série est censée converger sur $\mathbb{C}^*$, elle converge aussi en 1, et cela donne que $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$ doit converger. Et donc $a_n \to 0$ quand $n \to \pm\infty$.

2. Soit $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une fonction holomorphe surjective avec $f(0) = 0$. Alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $f(z) = e^{i\theta} z$. Vrai ou faux? Si vrai, prouvez-le, si faux, donnez un contre-exemple.

   Faux, prenons par exemple $f(z) = z^2$ (notons que si on avait injective en plus, ça serait vrai).

3. Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ telles que f/g admet un prolongement analytique sur $\mathbb{C}$. Alors f et g admettent un prolongement analytique sur $\mathbb{C}$. Vrai ou faux? Si vrai, donnez une preuve, si faux, donnez un contre-exemple.

   Faux, prenons par exemple $f(x) = g(x) = 1/\left(x^2+1\right)$. Leur rapport admet un prolongement analytique sur $\mathbb{C}$ tout entier, mais individuellement elles ont des pôles sur $\mathbb{C}$.

4. Soit $f : \mathbb{D} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe telle que f'/f est méromorphe sur $\mathbb{D}$. Alors f est méromorphe sur $\mathbb{D}$. Vrai ou faux? Si vrai, prouvez-le, si faux, donnez un contre-exemple.

   Faux, prenons par exemple la fonction $f(z) = e^{1/z}$ qui n'est pas méromorphe, mais telle que f'/f l'est.

5. Pour $t \in \mathbb{R}$, notons $f_t : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f_t(x) = x^t$. Pour quelles valeurs de t est-ce qu'il existe un prolongement analytique de f_t à un domaine U avec $\mathbb{R}^* \subset U \subset \mathbb{C}$.

   Pour toute valeur de $t \in \mathbb{R}$, il existe un prolongement analytique: prenons $U = \mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}_-$ (le plan fendu par la demi-droite imaginaire négative), qui contient $\mathbb{R}^*$. On y prend la détermination de l'argument dans $(-\pi/2, 5\pi/2)$ (par exemple), qui détermine un log log et on prend $f_t(z) = \exp(t \log(z))$.

6. Soit f une fonction entière telle que

$$\sup_{w\in\mathbb{C}} \limsup_{R\to+\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(0,R)} \frac{f'(z)}{f(z)-w} \mathrm{d}z = 1.$$

Alors il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tels que $f(z) = \alpha z + \beta$. Vrai ou faux? Si vrai, justifiez, si faux, donnez un contre-exemple.

Vrai. La formule nous dit que le nombre de solution à l'équation $f(z) = w$ pour w donné est toujours au plus 1. Par conséquent la fonction est injective. Si on regarde le développement en série à l'infini de f (si vous n'êtes pas à l'aise avec ça, prenez $g(z) = f(1/z)$ au voisinage de 0), on a qu'il ne peut pas avoir une singularité essentielle, car sinon par Casorati-Weierstrass on aurait une contradiction avec l'injectivité; il ne peut pas y avoir un pôle d'ordre $n > 1$ non plus car sinon on aurait plusieurs préimages pour un point donné (on serait un polynôme de degré $n > 1$). On est donc un polynôme d'ordre 1, ce qui l'énoncé.

7. Soit $\mathbb{H}_0 = \{z \in \mathbb{C} : \mathfrak{Re}(z) > 0\}$. Pour $z \in \mathbb{H}_0$, posons $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\mathrm{d}t$. Montrez que Γ satisfait

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}$$

pour tout $z \in \mathbb{H}_0$ et qu'en conséquent Γ s'étend en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-$, où $\mathbb{Z}_- = \{0, -1, -2, -3, \ldots\}$.

La convergence sur $\mathbb{H}_0$ suit du fait que $\left|t^{z-1}e^{-t}\right| = \left|t^{\mathfrak{Re}(z)-1}e^{-t}\right|$ qui est clairement intégrable sur $[0, \infty)$ pour $\mathfrak{Re}(z) > 0$. La fonction Γ est holomorphe sur $\mathbb{H}_0$: il est facile de voir que sa dérivée est $(z-1)\Gamma(z)$ (on doit faire une petite permutation intégrale et dérivée, mais tout se passe bien, vu que l'on intègre contre e^{-t}). Ensuite, on a que Γ peut être étendue sur $\{z \in \mathbb{C} : -1 < \mathfrak{Re}(z) \leq 0\} \setminus \{0\}$ en 'copiant' les valeurs de $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \mathfrak{Re}(z) \leq 1\}$ et en les divisant par z (cela ne marche pas en 0 car on devrait diviser par 0). Ensuite on étend sur $\{z \in \mathbb{C} : -2 < \mathfrak{Re}(z) \leq -1\} \setminus \{-1\}$ en copiant les valeurs sur $\{z \in \mathbb{C} : -1 < \mathfrak{Re}(z) \leq 0\} \setminus \{0\}$ et divisant par z et ainsi de suite.

8. Montrez que

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^s \ln n}$$

converge sur $\mathbb{H}_1 = \{z \in \mathbb{C} : \mathfrak{Re}(z) > 1\}$, et que

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^s \ln n} - \int_2^{\infty} \frac{1}{x^s \ln x} \mathrm{d}x,$$

s'étend en une fonction holomorphe sur $\mathbb{H}_0 = \{z \in \mathbb{C} : \mathfrak{Re}(z) > 0\}$.

On doit d'abord estimer $\left|\frac{1}{n^s \ln n}\right| = \frac{1}{n^{\mathfrak{Re}(s)} \ln(s)}$. Maintenant, on a que $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln n}$ converge pour $\alpha > 1$ (et en fait diverge en $\alpha = 1$, mais ce n'est pas la question), car c'est borné par $\sum \frac{1}{n^\alpha}$. Maintenant, pour montrer qu'on a l'extension sur $\mathbb{H}_0$ on procède comme pour la fonction ζ:

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x^s \ln x} \mathrm{d}x = \sum_{n=2}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{1}{x^s \ln x} \mathrm{d}x$$

et on regarde

$$\sum_{n=2}^{\infty} g_n(s)$$

avec

$$\begin{aligned} g_n(s) &= \frac{1}{n^s \ln n} - \int_n^{n+1} \frac{1}{x^s \ln x} \mathrm{d}x = \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^s \ln n} - \frac{1}{x^s \ln x} \right) \mathrm{d}x \\ &= \int_n^{n+1} h_s(n) - h_s(x) \, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

avec $h_s(x) = 1/(x^s \ln x)$. On a $|h_s(n) - h_s(x)| \leq \sup_{y \in [n,n+1]} |h_s'(y)|$ par l'inégalité des accroissements finis. Or

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(1/\left(x^s \ln x\right)\right)' = \frac{s \log x + 1}{x^{s+1} \log^2 x}$$

donc

$$\sup_{x \in [n,n+1]} |h_s'(x)| \leq \sup_{x \in [n,n+1]} \left| \frac{s \log x + 1}{x^{s+1} \log^2 x} \right| \leq \sup_{x \in [n,n+1]} \left| \frac{2s \log^2 x}{x^{s+1} \log^2 x} \right| = \left| \frac{2s}{x^{s+1}} \right| = \left| \frac{2s}{x^{\mathfrak{Re}(s)+1}} \right|$$

ce qui nous donne $\sum_{n=2}^{\infty} g_n(s)$ convergente pour $\mathfrak{Re}(s) > 0$.

9.