Bonjour tout le monde

Singularités: un point de non-définition (a priori) de la fonction qui est autrement définie dans un voisinage de ce point (excepté le point lui-même). En d'autres termes, si une fonction est définie sur $D(z_*, \epsilon) \setminus \{z_*\}$, z_* est une singularité de f.

Singularité essentielle: est-ce que le théorème des résidus marche avec ? La réponse est OUI. MAIS: c'est (souvent) difficile de calculer le résidu si on a une singularité essentiellement (pas de technique avec une limite).

Sur les anneaux. Si on a deux anneaux $A(z_*, r, R)$ $A(w_*, \rho, \varrho)$ montrer qu'il y a une app conforme ssi $R/r = \varrho/\rho$. $\Longleftarrow$ facile. Dans l'autre sens, on peut supposer $z_* = w_* = 0$ et $R = \varrho = 1$. Montrer que l'application existe seulement si $r = \rho$. Appelons φ cette (possible) application conforme (si elle existe); on peut supposer (quitte à composer avec un $z \mapsto 1/z$) que le bord externe est envoyé sur le bord externe. Le point, c'est que $h = \ln|\varphi|$ est alors une fonction harmonique (justifier un peu). Elle a valeur 0 sur le bord externe de $A(0, r, 1)$ et a valeur $\ln\rho$ sur le bord interne. Du coup, la question, c'est quand est-ce que φ existe vraiment? La réponse, c'est qu'il faut que $h = $ '$\mathfrak{Re}(\ln\varphi)'$ ait une partie imaginaire correspondante (ça n'existe pas) ou au moins soit telle que cette partie imaginaire, quand on fait un tour autour du trou gagne $2\pi i$, comme ça l'exponentielle serait quand même bien définie. Donc pour que la partie imaginaire gagne exactement $2\pi i$ (ou un multiple de ça) quand on fait un tour, on voit qu'en fait une seule valeur de ρ est possible, c'est $\rho = r$, car on peut résoudre explicitement pour $h(z) = \ln(|z|\rho/r)$ (c'est une solution qu'on sort du chapeau, mais il y a une solution unique, donc c'est bon). Et donc $\rho/r = 1$. Maintenant si le multiple était plus que 1, on n'aurait pas bijectivité.

Contre-exemples de: si on a divergence nulle en 3d, on a un potentiel vecteur.

Contre-exemple 'facile': $f(x) = \frac{x}{\|x\|^3}$ (force d'attraction électrostatique d'une charge ponctuelle). Un peu fatigant de vérifier $\mathrm{div} f = 0$, mais ça se fait (le théorème de Gauss dit ça aussi), mais ça n'a pas de potentiel vecteur, car si on prend une sphère autour de l'origine, le flux de f à travers cette sphère fait qqch de non nul (aussi le théorème de Gauss); or si on avait un potentiel vecteur, par Kelvin-Stokes, ça serait la circulation du potentiel vecteur le long du bord de la surface; en l'occurence, vu que la surface est sans bord, ça ferait zéro.

Contre-exemple 'dur': si on dit qu'il faut que le domaine de définition n'ait pas de sphère topologique non contractible, il y a un toujours un contre-exemple. La force électrique dans $\mathbb{R}^3 \setminus \mathrm{droite} \setminus \mathrm{cercle}$ avec le cercle qui fait un tour autour de la droite, et avec une charge uniforme sur le cercle.

Quand on intègre une fonction complexe C^1 sur le bord d'un carré de taille ϵ, on trouve $\frac{1}{2i}\epsilon^2\overline{\partial}f + o(\epsilon^2)$. Si on intègre sur une discrétisation d'un grand carré (par ex) avec $1/\epsilon^2$ petits carrés de taile ϵ chacun, on trouve $\frac{1}{2i}\iint \overline{\partial}f + o(1) \to \frac{1}{2i}\iint \overline{\partial}f$.

Pour le théorème des résidus, ça pourrait aussi marcher pour un nombre infini de singularités, mais il faut faire attention et encore plus dur de trouver des exemples intéressants et utiles.

Par rapport $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n\in\mathbb{Z}\cap[-N,N]} \frac{1}{(z-n)^2}$ et la convergence. Uniforme sur $\overline{D}(0,R) \cap (\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z})$ pour tout $R>0$.

Un truc sur l'effet de pointe: on peut envoyer $\mathbb{H}\setminus[0,i]$ sur $\mathbb{H}$ avec $\sqrt{z^2+1}$ et du coup si on cherche une fonction harmonique sur $\mathbb{H}\setminus[0,i]$ avec conditions au bord 1 sur $[0,i]$ et 0 ailleurs, on peut la trouver explicitement.

RAQ de l'année passée: question sur 'si $f(z)=w$' a un nombre fini de solutions pour tout w, alors f est un polynôme. Baire dit: l'intersection dénombrable d'ensembles ouverts denses est dense; Baire pour les fermés dit: la réunion dénombrable de fermés d'intérieurs vides est d'intérieur vide. Si on n'est pas un polynôme, on a une sing essentielle à l'infini, et du coup l'image de tout voisinage de l'infini $\mathbb{C}\setminus D(0,R)$ étant dense, l'intersection de ces voisinages reste dense. Tout point dans cette intersection a dès lors un nombre infini de préimages, et donc ça contredit l'hypothèse.

Proposition 256. Si on a function $f(x,y)$ rationnelle... ce n'est pas nécessaire d'être rationnel.

Prouver que $\mathbb{C}\setminus\overline{Q}$ s'envoie sur $\mathbb{C}\setminus\overline{\mathbb{D}}$. On doit 'conjuguer' par $z\mapsto 1/z$. $\mathbb{C}\setminus\overline{Q}$ s'envoie, par $z\mapsto 1/z$ sur $P\setminus\{0\}$ où P est un simplement connexe. $\mathbb{C}\setminus\overline{\mathbb{D}}$ s'envoie sur $\mathbb{D}\setminus\{0\}$. Si on prend une application conforme $\varphi: P\to\mathbb{D}$ qui envoie 0 sur 0, on a $1/(\varphi(1/z))$ envoie $\mathbb{C}\setminus\overline{Q}$ s'envoie sur $\mathbb{C}\setminus\overline{\mathbb{D}}$.