Réponses aux questions Analyse III

Casorati-Weierstrass pour singularités essentielles à l'infini: ça marche, pareil, prendre $z \mapsto f(1/z)$.

Si $f : U \to \mathbb{C}$ est holomorphe et a un zéro en $z_* \in U$, alors il existe $g : U \to \mathbb{C}$ aussi holomorphe telle que $f(z) = (z - z_*)\, g(z)$. Preuve: prenons le développement en série de f au voisinage de z_*, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_*)^n$. Vu que $f(z_*) = a_0 = 0$, donc on a $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_*)^n = (z - z_*) \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_*)^{n-1}$ et

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_*)^{n-1}$$

est bien holomorphe au voisinage de z_* (y compris en z_*).

Est-ce qu'une fonction avec singularité a toujours des racines sur un simplement connexe? Non. Mais parfois oui. C'est compliqué.

Pourquoi est-ce que si γ est un chemin et f est holomorphe définie au voisinage de l'image de γ, on a que (là où γ est dérivable),

$$\Phi = f \circ \gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$$

$$\overline{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f \circ \gamma)(t)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overline{(f \circ \gamma)}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\overline{f} \circ \gamma\right)(t) = \overline{f'(\gamma(t))\,\gamma'(t)}$$

$$\overline{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f \circ \overline{\gamma})(t)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\overline{f} \circ \overline{\gamma}\right)(t) = \overline{f'(\overline{\gamma}(t))}\gamma'(t)$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overline{\Phi}(t) &= \lim_{h \to 0} \frac{\overline{\Phi}(t+h) - \overline{\Phi}(t)}{h} = \\ &= \lim_{h \to 0} \overline{\frac{\Phi(t+h) - \Phi(t)}{h}} \\ &= \overline{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi(t)}\end{aligned}$$

?

Pour les intégrales, pour $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$,

$$\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x := \int_a^b \mathfrak{Re}(\varphi)(x)\,\mathrm{d}x + i \int_a^b \mathfrak{Im}(\varphi)(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}\int_a^b \overline{\varphi}(x)\,\mathrm{d}x &:= \int_a^b \mathfrak{Re}(\varphi)(x)\,\mathrm{d}x + i \int_a^b \mathfrak{Im}(\overline{\varphi})(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b \mathfrak{Re}(\varphi)(x)\,\mathrm{d}x - i \int_a^b \mathfrak{Im}(\varphi)(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \overline{\int_a^b \mathfrak{Re}(\varphi)(x)\,\mathrm{d}x + i \int_a^b \mathfrak{Im}(\varphi)(x)\,\mathrm{d}x}\end{aligned}$$

Est-ce que si f est entière, sont développment en série converge sur tout $\mathbb{C}$? Oui, mais pas uniformément (sauf polynôme). La convergence est uniforme sur les compacts de $\mathbb{C}$. Pourquoi? On a le résultat que ça converge uniformément sur les compacts de tout disque $D(0, R)$ pour tout $R > 0$

Est-ce que si on a un rayon de convergence 1, on a forcément un point de divergence (de la série) sur $\partial D(0,1)$. Non. Contre-exemple: $\sum_{n=1}^{\infty} z^n/n^2$.

Si on a une fonction f avec une singularité essentielle en z_*, si $g = 1/f$ a une singularité en z_* alors ça sera toujours une singularité essentielle aussi. Pourquoi? Par Casorati-Weierstrass, on a une suite $z_n \to 0$ telle que $f(z_n) \to 0$. Donc $g(z_n) \to \infty$. Si g avait un pôle, on aurait $1/g(z) \to 0$ quand $z \to 0$ du coup, on devrait avoir $f(z) \to 0$ quand $z \to 0$, ce qui n'est pas possible avec une singularité non illusoire.

Est-ce que les singularités peuvent avoir un point d'accumulation? Oui, par exemple $\frac{1}{\sin(1/(\pi z))}$ a des singularités en tous les points ou $\sin(1/(\pi z))$ s'annule, qui sont les inverses des points où $\sin(\pi z)$ s'annule qui sont les entiers de $\mathbb{Z}$. Du coup en $\left\{\frac{1}{n} : z \in \mathbb{Z}^*\right\}$ on a des singularités. Ces singularités ont un point d'accumulation en 0, qui n'est pas une singularité en soi, car il n'y a pas de voisinage (même épointé) de 0 où f soit holomorphe.

Un lacet est *contractible* (dans un domaine U) s'il existe une homomotopie (une transformation continue dans l'espace des lacets) qui le transforme (en restant dans U en un lacet trivial). Un lacet est rétractable si cette homotopie peut être choisie comme étant une application $F(t, s) = (1-s)\gamma(t) + sz_*$. Donc: rétractable est toujours contractible. La réciproque n'est pas vraie (penser à un domaine non-étoilé, comme la banane).

Comment on montre qu'une forme close est une fonction holomorphe (en supposant que c'est le cas)? Une forme close est une composition de fonctions a priori connues comme holomorphe, et c'est donc holomorphe. En pratique, même pour des formes non closes, si on a une expression pour la dérivée, c'est un bon signe.

Est-ce que si on a un pôle (ou même une singularité essentielle) on peut toujours utiliser le lemme de recentrage en un autre point? Oui, ça suit du fait qu'on peut toujours développer autour d'un point de l'ensemble de définition avec les dérivées (et que l'on peut dériver les séries de Laurent terme à terme).

Comment on montre que si une fonction complexe est dérivable, sa dérivée est continue? Ce n'est pas trivial, mais une fois qu'on connaît les outils, on montrer un critère de Morera local. Pour tout triangle inclus dans le domaine, on peut montrer que l'intégrale le long de son bord est nulle.

Pour une application conforme $\mathbb{H} \to \mathbb{H}$ pourquoi le bord est-il envoyé sur le bord (sans utiliser la classification des applications conformes)? La bonne manière de le faire, c'est d'utiliser la classification des app conf $\mathbb{D} \to \mathbb{D}$, et de composer avec une app conforme $\mathbb{D} \to \mathbb{H}$. Avertissement, l'énoncé 'bord sur bord', n'est vrai que si on prend ∞ comme point de bord de $\mathbb{H}$ $(z \mapsto -1/z)$.