

- Analyse complexe
 - Nombres complexes (topologie), thm fond de l'algèbre
 - Fonctions analytiques: propriétés de base, lemme de recentrage
- Bord d'une sphère:
 - [Pas ce qu'on veut vraiment] Si on prend la sphère $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ avec la topologie de $\mathbb{R}^3$, son intérieur est vide (clair) et comme elle est fermée (clair) son adhérence est elle-même, donc son bord est elle-même.
 - Si on prend la topologie induite (ce qu'on veut plutôt), les ouverts de $\mathbb{S}^2$ sont générés par les intersections de boules ouvertes de $\mathbb{R}^3$ avec $\mathbb{S}^2$, alors l'intérieur de $\mathbb{S}^2$ est $\mathbb{S}^2$ tout entier (chaque point a un voisinage induit dans $\mathbb{S}^2$). Du coup $\partial\mathbb{S}^2 = \mathbb{S}^2 \setminus \text{Int}(\mathbb{S}^2) = \emptyset$
- Green-Riemann sur la sphère $\rightarrow$ techniquement c'est Kelvin-Stokes. Si vous prenez un quartier de plus en plus grand, vous verrez qu'à un moment le bord est un lacet qui devient de plus en plus petit, et quand on a toute la sphère on a le lacet trivial. $\iint_{\mathbb{S}^2} \text{rot} F \cdot d\sigma = 0$, car 0 est la circulation le long du lacet nul (notez que ça se voit aussi avec Gauss-Ostrogradski: le flux de $\text{rot} F$ est l'intégrale sur la boule de $\text{div} \text{rot} F$, qui fait 0)
- Exercice sur l'anneau (notez qu'il est difficile: personne n'a su le faire). Si on a app conf φ d'un anneau $A(0, r, 1)$ vers un anneau $A(0, \rho, 1)$, soit on envoie le bord ext sur le bord ext (et pareil pour le bord int), soit on échange ext et int (dans ce cas, on compose avec $1/z$ pour inverser cette situation) $\rightarrow$ on peut suppose ext $\rightarrow$ ext et int $\rightarrow$ int. Du coup, on regarde le log du module de φ , harmonique égal à 0 sur le bord ext et à $\log(\rho)$ sur le bord int $\rightarrow$ en fait, c'est la fonction $\log z \frac{\log \rho}{\log r}$ (c'est la seule fonction harmonique avec les bonnes propriétés) $\rightarrow$ le seul cas possible pour avoir une vraie fonction φ dans ce cas, c'est $\log \rho / \log r = 1$.
- Unicité Riemann: on a fixé la condition $f'(0) > 0$, du coup la seule valeur de $\theta \in \mathbb{R}$ telle que $f(z) = e^{i\theta} z$ ait dérivée positive, c'est $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$
- Pour faire des fct elliptiques à partir de Weierstrass

$$\frac{1}{z^2} + \sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{(z - \lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2}$$

Si on dérive

$$-2 \sum_{\lambda \in \Lambda} \frac{1}{(z - \lambda)^3}$$

On redérive

$$6 \sum_{\lambda \in \Lambda} \frac{1}{(z - \lambda)^4},$$

etc... Maintenant on peut aussi décaler de $w \in \mathbb{C}$, par ex

$$-2 \sum_{\lambda \in \Lambda} \frac{1}{(z - w - \lambda)^3}$$

avec ça on peut générer n'importe quel collection finie de pôles de n'importe quels ordres (en prenant des comb lin des choses ci-dessus). Donc c'est bon.

- Contre-ex du thm de Riemann avec $\mathbb{C} = U$ ($U = D(0,1)$?) Pas possible à cause de Liouville.
- Est ce qu'il y a un lien entre Green Riemann et la formule de Cauchy ? Peut-on déduire Cauchy à partir de Green riemann? Réponse: oui (en supposant holomorphe = C^1 , ce qu'on a fait).
- Casorati-Weierstrass: image de tout vois de la sing ess est dense dans $\mathbb{C}$. Oui (mais svp comprenez pourquoi c'est la même chose que l'énoncé plus spécifique)
- "Soit U un domaine simplement connexe avec $\bar{D} \subset U$. Montrer qu'il existe $r > 0$ tel qu'il existe une application conforme de $U \setminus \bar{D}$ vers $A(0,r,1)$. Indice: construisez le log du module de cette application conforme d'abord." Voici la formulation exacte, de l'examen de l'année dernière -> ok, j'admets que j'ai posé cette question. Même raisonnement que ci-dessus. Le log du module doit être une fonction harmonique... il faut donc résoudre le problème de Dirichlet dans ce domaine -> argument avec des marches aléatoires (le plus facile et le plus intuitif). La preuve standard, c'est de minimiser $\iint \|\nabla f\|^2$. Dans ce cas, un argument c'est de 'dérouler l'application conforme' sur une bande, essentiellement de construire le 'log' de l'application conforme
- Peut-on utiliser le résultat plus général sur les singularités effacables de Riemann, à savoir que si la limite de $(z - z_0)f(z) = 0$ pour z tend vers z_0 alors z_0 est une singularité effacable -> oui, vous pouvez.
- Vous visez quelle moyenne de classe ce semestre? -> je ne réponds pas à ça, mais les autres années, ça a tourné autour de 4.7.
- Soit f une fonction entière telle que pour tout $w \in \mathbb{C}$, le nombre de solutions de $f(z) = w$ est fini. Montrer que f est un polynôme. -> Utiliser Casorati-Weierstrass à l'infini: se ce n'est pas un polyn, il y a une sing essentielle à l'infini, et du coup, on a un nombre infini de w avec un un nombre infini de préimages. Pourquoi? L'image de chaque voisinage $D(z, \frac{1}{n}) \setminus \{z\}$ est un ouvert dense dans $\mathbb{C}$, donc $\bigcap_n f(D(z, \frac{1}{n}) \setminus \{z\})$ est aussi dense (Baire). Mais chaque point dans cette intersection a par définition une infinité de préimages

- Est ce qu'il existe des singularités d'une fonction qui ne soient ni des poles ou essentielles isolées? $\rightarrow$ non, par définition de sing (elle doit être isolée, du coup son dév en série de Laurent a soit un nombre fini de termes avec puissance nég [pôle], soit un nombre infini [ess], soit un nombre nul [illusoire])
- Peut-on utiliser le thm de Rouché vu que l'on ne l'a pas vu en cours $\rightarrow$ a priori non, mais si vous l'utilisez à bon escient, on sera gentils.
- Si on a une fonction entière, elle est en particulier définie au voisinage de l'infini. Si elle n'a pas de sing ess à l'infini, soit c'est une sing eff (mais alors elle est constante car bornée), soit c'est un pôle (donc elle est mérom... en fait c'est un polyn). Plus gén, pour être mérom sur $\hat{\mathbb{C}}$, il faut avoir que toutes les sing (y compris l'infini soient des pôles).
- Sing effaçable: pas de termes négatifs dans le dév de Laurent au vois du point (si le point n'est à l'infini), çàd, pas de terme qui explose. Maintenant à l'infini, on regarde avec le chgt de variable $w = 1/z$, les termes 'négatifs' (par rapport à w) sont les termes 'positifs' (par rapport à z). Si on n'a pas de termes de puissance strictement positive, alors il n'y pas d'explosion à l'infini. Une fonction pas constante qui a une sing effaçable à l'infini: $1/z^3 + 8$ [mais pas entière].
- Peut on utiliser propriété de La valeur moyenne et principe du max; liouville etc sur les fonctions harmoniques à l'examen ? $\rightarrow$ oui.
- Analyse vectorielle: résumé rapide. Grad, rot, div, Δ . Questions qui nous guident: and est-ce qu'on peut dire que $X = \text{grad}f$, quand est-ce qu'on peut dire que $X = \text{rot}Y$ (en vrai, dur, on ne l'a pas vraiment résolu). Première idée: circulation (comme inverse possible du gradient) $\rightarrow$ deuxième idée circulation infinitésimale $\rightarrow$ rot 2d et 3d (et idée en plus grande dim) $\rightarrow$ version non infinitésimale de ça: Green-Riemann (2d), Kelvin-Stokes (3d). K-S nous amène au flux. Version infini du flux sur 'petites surfaces' $\rightarrow$ divergence. Version non-infini $\rightarrow$ Gauss-Ostrogradki... $\text{div}(\text{grad}) = \text{laplacien}$ $\rightarrow$ fonctions harmoniques, princ. max, connexions avec analyse complexe en 2D (en passant aussi connexion de G-R avec analyse complexe $\bar{\partial}$ est relié au rot) $\rightarrow$ EDPs en physique (chaleur, ondes, Maxwell, Navier-Stokes, ...).
- Aucun opérateur 1d invariant par rotation? $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, un opérateur 1D est toujours une combinaison linéaire de dérivées partielles, mais du coup toujours de la forme $v \cdot \text{grad}(f)$, mais du coup si on 'tourne' la fonction, $f \rightsquigarrow (x \mapsto f(Rx))$, le gradient sera affecté l'op deviendra $R^T v \cdot \text{grad}(f)$. Pas de vect de $\mathbb{R}^n$ non-nul invariant par toute rotation, mais des formes bilin de $\mathbb{R}^n$ inv. par rotation existent (par ex le produit scalaire $\longleftrightarrow$ laplacien).

- La divergence prend une fonction $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ et en fait une fonction $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, donc elle ne 'compte pas' (mais ok, elle est inv par rotation et du premier ordre).
- est-ce que vous pourriez donner une base pour la question 12 de l'examen blanc svp ? celle avec les fcts hol sur $\mathbb{C} \setminus \{1, \dots, n\}$ [au plus des pôles d'ordre n] $\rightarrow$ l'idée, c'est pour chaque pôle $j \in \{1, \dots, n\}$, il faut choisir des coefficients $a_{-1}^{(j)}, \dots, a_{-n}^{(j)}$, et une fois qu'on a fait ça, si on soustrait à notre fonction f la fonction

$$g(z) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{a_{-k}^{(j)}}{(z-j)^k}$$

alors $f - g$ a des sing illusoirs en tous les j 's, donc elle se prolonge en une fct entière (qui doit tendre vers 0 à l'infini) $\rightarrow$ donc qui vaut 0. Combien de coefficients devait-on choisir ? $n^2 \rightarrow$ dim est n^2 . Base $\left(z \mapsto \frac{1}{(z-j)^k} \right)_{1 \leq j, k \leq n}$

- Comment trouver une fonction elliptique telle que $\lim_{z \rightarrow \lambda} (z - \lambda)(f'/f) = -4$ pour tout λ dans le réseau ? $\rightarrow$ il faudrait avoir un pôle d'ordre 4 (le rés devant être -4) prendre $\wp''_{\Lambda}(z)$
- On a vu que pour une fonction holomorphe ; l'intégrale ne change pas sous homotopie. L'équivalent en analyse vectorielle; pour les circulations c'est d'être de rotationnel nul?
- Tous les pôles d'une fonction elliptique sont simples du coup ? $\rightarrow$ non. Mais toutes les dérivées $\log f'/f$ de fonct mérom ont des pôles simples.
- On a montré l'existence de $\log f$ pour f définie sur un simplement connexe et qui ne s'annule pas, est-ce que c'est possible de généraliser ce résultat pour un domaine avec une propriété plus faible que la simple connexité ? $\rightarrow$ pas vraiment [il faut que f ne 'tourne pas', i.e. que $\oint f'/f = 0$ autour de chaque trou] autour de chacun des trous, mais du coup ça suppose quelque chose sur f]
- Y a-t-il des fonctions elliptiques qui sont pas de forme $1/((z-\lambda)^n)$? Si on définit elliptique comme mérom et bipériodique (comme c'est fait en général), alors il y a un nombre fini de sing dans une 'cellule' (domaine fondamental, $[0, 1] \times [0, i]$ si $\Lambda = \mathbb{Z}^2$ et ce sont tous des pôles), non.
- Fonctions injectives sur le bord de $\mathbb{D}$: $f|_{\partial\mathbb{D}} : \partial\mathbb{D} \rightarrow \partial\Omega$ de manière injective. Si on veut compter le nombres de solutions de $f(z) = w$, il faut intégrer

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial\mathbb{D}} \frac{f'(z)}{f(z) - w} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial\Omega} \frac{1}{\zeta - w} d\zeta = \text{Ind}_w(\partial\Omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } w \in \mathbb{C} \setminus \overline{\Omega} \\ 1 & \text{si } w \in \Omega \end{cases}$$

par changement de variable $f|_{\partial\mathbb{D}}$ est un difféo (donc changement de variable marche). Si f est injective sur $\partial\mathbb{D}$, f envoie $\partial\mathbb{D}$ sur quelque chose, appelons-le γ , vu que c'est un lacet simple. Maintenant on regarde pour $w \in \mathbb{C} \setminus \gamma$, le nombre de solutions de $f(z) = w$. Clairement, cela n'a pas de solution sur $\partial\mathbb{D}$. Si $\text{Ind}_w(\gamma) = 1$, on a une préimage, si $\text{Ind}_w(\gamma) = 0$, on n'a pas de préimage. Pourquoi $f(\mathbb{D}) \cap f(\partial\mathbb{D}) = \emptyset$, c'est le théorème de l'application ouverte si on avait $u \in D$ tel que $f(u) \in f(\partial\mathbb{D}) = \gamma$, on n'a pas tout un voisinage de $f(u)$ dans $f(\mathbb{D})$, vu que γ est bordé par des points v tel que $\text{Ind}_v(\gamma)=0$, ces points sont donc tels que $f(z) = v$ n'a pas de zéro, donc tels que $f(z) = v$ n'a pas de solution.

- Est-ce que toute fonction rationnelle qui envoie des cercles et des lignes sur des cercles et des lignes est une transformation de Moebius ? Une fonctionnelle est de la forme P/Q avec P, Q polynômes. Si elle n'est pas de Moebius, elle n'est pas injective (facile à voir avec pré/post-composition). Si elle n'est pas injective, il y a des paires de points envoyés sur les mêmes points. Si on prend un cercle qui passe par ces deux points, pour leur image soit la même, le cercle image doit 'faire deux tours' sur le cercle... Il faut réfléchir un peu pour écrire ça proprement.