Examen Analyse III pour mathématiciens, 2022

- Lire toutes les questions et ne pas rester bloqué sur une question donnée.
- Toutes les questions valent le même nombre de points. Elles sont grosso modo ordonnées par ordre de difficulté.
- Il ne faut pas répondre à toutes les questions pour avoir la note maximale.
- Pour les questions avec vrai/faux, il est demandé de *justifier* vos assertions. Par exemple, si vous dites qu'une fonction est bijective, il est *impératif* que vous expliquiez *pourquoi* (ou que vous disiez que ça a été vu en cours, ou que c'est évident (si c'est vraiment le cas)).

Notations et conventions

- On note $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $\bar{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$, $\partial\mathbb{D} = \bar{\mathbb{D}} \setminus \mathbb{D}$, $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$, $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $\mathbb{R}_+^* = \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}^*$, $A(z_*, r, R) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_*| < R\}$.
- On rappelle qu'un réseau $\Lambda \subset \mathbb{C}$ est un ensemble de la forme $\{m\mu + n\nu : m, n \in \mathbb{Z}\}$ pour $\mu, \nu \in \mathbb{C}^*, \mu/\nu \notin \mathbb{R}$.
- Les fonctions holomorphes sont toujours supposées $\mathcal{C}^1$ (comme dans le cours).

Questions

1. Soit $U \subsetneq \mathbb{C}$ un domaine simplement connexe. Alors il existe une unique application conforme $U \to \mathbb{D}$. Vrai ou faux? Si vrai, donnez une preuve, si faux, donnez un contre-exemple.
2. Donnez une fonction holomorphe $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ (avec une formule close explicite, pas une série entière) telle que
$$\int_0^{2\pi} f\left(e^{it}\right) e^{int} \mathrm{d}t = \frac{2\pi}{|n|!} \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$
3. Soient $f : \mathbb{C} \setminus \{z_*\} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Si
$$\lim_{z \to z_*} \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}} \left((z - z_*)^n f(z)\right) = (n-1)!\mathrm{res}_{z_*}(f) \neq 0$$
alors f a un pôle d'ordre $\leq n$. Vrai ou faux ? Si vrai, donnez une preuve, si faux, donnez un contre-exemple.
4. Si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est une fonction $\mathcal{C}^1$ (vue comme fonction de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$) telle que
$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{f(z + ih) - f(z)}{h} = i \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{f(z + h) - f(z)}{h},$$
alors f est holomorphe. Vrai ou faux? Si vrai, donnez une preuve, si faux, donnez un contre-exemple.
5. Soient $f, g : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ holomorphes avec
$$\frac{f}{g}(z) \underset{\substack{z \to 0 \\ \neq}}{\longrightarrow} 1.$$
Alors $\mathrm{res}_0 f = \mathrm{res}_0 g$. Vrai ou faux ? Si vrai, donnez une preuve, si faux, donnez un contre-exemple.
6. Soit U un domaine avec $U \supset \overline{\mathbb{D}} \setminus \{0\}$ $g : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe qui admet un pôle simple (d'ordre 1) en 0 avec résidu 1.
   (a) Peut-on avoir $|g(z)| > 1$ pour tout $z \in \partial\mathbb{D}$?
   (b) Peut-on avoir $|g(z)| < 1$ pour tout $z \in \partial\mathbb{D}$?

7. Soit $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une fonction holomorphe avec $f(0) = f'(0) = 0$. En suivant la même stratégie que pour prouver le lemme de Schwarz, montrez que $|f''|(0) \leq 2$.

8. Soit f une fonction entière telle que $\forall M > 0, \exists R > 0$ tel que $\forall z \in \mathbb{C}$ avec $|z| \geq R$, on a $|f(z)| \geq M$. Alors f est un polynôme. Vrai ou faux? Si vrai, donnez une preuve, si faux, donnez un contre-exemple.

9. Soit $\mathcal{F}$ l'espace des fonctions holomorphes $\mathbb{C} \setminus \{1, 2, \ldots, n\} \to \mathbb{C}$ qui tendent vers 0 à l'infini telles que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$
$$\lim_{z \to i} (z - i)^{n+1} f(z) = 0.$$
Montrez que c'est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n^2.

10. On rappelle que le volume d'un domaine $U \subset \mathbb{R}^3$ est défini par
$$\mathrm{Vol}(U) = \iiint_U 1 \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z.$$
Trouvez un champ vectoriel $X : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tel que pour tout domaine U borné avec ∂U qui est une surface lisse (orientée vers l'extérieur de U), son flux à travers ∂U donneåå
$$\mathrm{Vol}(U) = \iint_{\partial U} X \cdot \mathrm{d}\nu_{\partial U}.$$

11. Soit $f : \mathbb{C} \setminus \{0, 1\} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe, avec $\mathrm{res}_1 f \neq 0$ et $\mathrm{res}_0 f / \mathrm{res}_1 f \notin \mathbb{R}$. Montrez que $\left\{ \oint_\gamma f(z) \, \mathrm{d}z : \gamma \text{ lacet dans } \mathbb{C} \setminus \{0, 1\} \right\}$ forme un réseau $\Lambda \subset \mathbb{C}$.

12. Soient $w \in \mathbb{C}$ et $\epsilon > 0$. Soit $\mathcal{F}$ une famille de fonctiååons holomorphes $\mathbb{D} \to \mathbb{C}$ telles que $\forall f \in \mathcal{F}, f(\mathbb{D}) \cap D(w, \epsilon) = \emptyset$. Montrer que pour toute suite $(f_n)_n$ dans $\mathcal{F}$, il existe une sous-suite f_{n_k} qui converge au sens de la topologie de la sphère de Riemann $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$: pour tout $z \in \mathbb{D}$, soit il existe $w \in \mathbb{C}$ tel que $f_{n_k}(z) \to w$, soit on a $1/f_{n_k}(z) \to 0$.

13. Soit U un domaine tel que $U \supset \bar{\mathbb{D}}$ et f une fonction holomorphe $U \to \mathbb{C}$. Montrer que si $f(\partial \mathbb{D}) = \gamma$ est un lacet simple et que $f\big|_{\partial \mathbb{D}} : \partial \mathbb{D} \to \gamma$ est injective, alors $f\big|_{\mathbb{D}}$ est injective. Indice: comptez les zéros de $f(z) = w$ pour $w \in \mathbb{C}$.

14. (Plus difficile) Soit U un domaine simplement connexe avec $\overline{\mathbb{D}} \subset U$. Montrez qu'il existe $r > 0$ tel qu'il existe une application conforme de $U \setminus \overline{\mathbb{D}}$ vers $A(0, r, 1)$ Indice: construisez le log du module de cette application conforme d'abord.