ANALYSE III TEST

13 JANVIER 2020

Nom et prénom:______________________________ SCIPER: ____________

- Matériel autorisé: aucun (pas de polycopié, pas de calculatrice)
- Les problèmes sont ordonnés par ordre croissant de difficulté. Le dernier problème est difficile.
- Vous pouvez utiliser sans les reprouver les énoncés vus en classe et en exercices, à condition de les énoncer clairement.
- Vous avez 15 problèmes, chaque problème vaut 7 points. Pour les questions vrai/faux, un point pour la bonne réponse, 6 points pour la preuve (si vrai) ou le contre-exemple (si faux).
- Vous pouvez écrire sur des feuilles de brouillon, mais les réponses qui seront corrigées devront figurer sur les feuilles.
- On écrit $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \Im\mathfrak{m}\,(z) > 0\}$, $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $B_1^n(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$, $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$, $\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$.

---

(1) Soit U un domaine t.q. $\overline{\mathbb{D}} \subset U$ et soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe donnée par $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$. Donnez une expression pour les coefficients a_n en termes des valeurs de f sur $\partial\mathbb{D}$.

(2) Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ la surface donnée par $S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ et soit $X : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ le champ vectoriel $X(x, y, z) = (x, y, z)$. Calculer

$$\iint_S \mathrm{rot} X \cdot \nu \; \mathrm{d}\sigma$$

où ν désigne la normale intérieure (pointant vers l'origine $(0, 0, 0)$).

(3) Si $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sont des fonctions holomorphes t.q. $f\left(\frac{1}{n}\right) = g\left(\frac{1}{n}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, est-il toujours vrai que $f = g$?

(4) Trouvez une fonction holomorphe surjective $\mathbb{D} \to \mathbb{C}$.

(5) Soit f une fonction analytique sur $\mathbb{C}^*$ telle que $|f(z)| \leq \sqrt{z} + \frac{1}{\sqrt{z}}$. Montrer que f est constante.

(6) Soit $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3)$ une fonction t.q. $u(x) = 0$ sur $\mathbb{S}^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\}$. Montrer que

$$\iiint_{B_1^3(0)} \|\nabla u\|^2 \mathrm{d}x = -\iiint_{B_1^3(0)} u \Delta u \; \mathrm{d}x \; .$$

(7) Si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe telle que $\Re\mathfrak{e}\,(f) - \Im\mathfrak{m}\,(f)$ est bornée, montrer que f est constante.

(8) Existe-t-il une fonction continue f définie sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ telle que $f^2(z) = z$? Si oui, donnez une formule explicite, si non, justifiez.

(9) Si $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe avec $f(z) \neq 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, est-il toujours vrai qu'il existe g holomorphe tel que $e^g = f$?

(10) Existe-t-il un polynôme P non nul tel que $P(z)\, e^{1/z}$ se prolonge en une fonction entière?

(11) Soit $\Lambda := \{m + in : m, n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$. Trouver une fonction elliptique $f : \mathbb{C} \setminus \Lambda \to \mathbb{C}$ (c.-à-d. $f(z + k) = f(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$ et $k \in \Lambda$) telle que

$$\lim_{z\to\lambda} \frac{f'(z)}{f(z)} = -4 \qquad \forall \lambda \in \Lambda.$$

(12) Construire une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ avec des singularités essentielles en tout $n \in \mathbb{Z}$.

(13) Soit f la fonction $f(z) = \frac{1}{4} + \sum_{n\geq 0} n z^n$. Montrer que f est une application conforme $\mathbb{D} \to \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$.

(14) Soit f une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec un nombre fini de pôles; montrer qu'il existe g et h entières $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telles que $f = g/h$.

(15) Soient $r_1, r_2, R_1, R_2 > 0$ et soient A_1, A_2 les anneaux $A_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| \in (r_1, R_1)\}$ et $A_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| \in (r_2, R_2)\}$. Montrer qu'il existe une application conforme $\varphi : A_1 \to A_2$ si et seulement si $\frac{R_1}{r_1} = \frac{R_2}{r_2}$.