Corrigé 5

Exercice 1.(Formule intégrale de Schwarz). Soit f analytique dans $D(0,1+\epsilon)$ pour un certain $\epsilon > 0$.

(1) Montrer que
$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}}{e^{it}-z} f(e^{it})dt, \qquad z \in D(0,1)\ ;$$

(2) Montrer que pour tout $z \in D(0,1)$
$$f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it})\frac{1+e^{it}\bar{z}}{1-e^{it}\bar{z}}dt\ ;$$

(3) En déduire la formule intégrale de Schwarz
$$f(z) = i\mathrm{Im} f(0) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\mathrm{Re} f(e^{it})dt, \qquad z \in D(0,1);$$

(4) Montrer que pour tout $z \in D(0,1)$,
$$\begin{aligned} f(z) - f(0) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{2z}{e^{it}-z}\mathrm{Re} f(e^{it})dt, \\ \frac{f^{(n)}(z)}{n!} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{2e^{it}}{(e^{it}-z)^{n+1}}\mathrm{Re} f(e^{it})dt, \\ \mathrm{Re} f(z) &= \frac{1-|z|^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{Re} f(e^{it})}{|e^{it}-z|^2}dt. \end{aligned}$$

Démonstration.

(1) On peut écrire l'intégrale comme une intégrale sur le cercle unitaire, avec la paramétrisation $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma : t \mapsto e^{it}$. Ainsi,
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}}{e^{it}-z} f(e^{it})dt = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(0,1)} \frac{f(w)}{w-z}dw.$$
Puisque f est holomorphe, par le Théorème de Cauchy, on en déduit que l'expression ci-dessus est égale à $f(z)$.

(2) On note que si f and g sont deux fonctions holomorphes sur $D(0,1+\epsilon)$ telles que $f(0) = g(0)$, alors on a que
$$f(0) = g(0) = \int_{\partial D(0,1)} \frac{g(w)}{w}dw.$$
C'est ce qu'on utilise ici avec la fonction $g(w) = f(w)\frac{1+w\bar{z}}{1-w\bar{z}}$. The function $g(w)$ is holomorphic on $D(0,1+\min(\epsilon,(1/|z|-1)/2))$.

(3) Grâce au point (1), on a que
$$f(z) - \frac{f(0)}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it})\left(\frac{e^{it}}{e^{it}-z} - \frac{1}{2}\right)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it})\left(\frac{e^{it}+z}{2(e^{it}-z)}\right)dt.$$
Ainsi, grâce au point (2), on obtient
$$\begin{aligned} f(z) - i\mathrm{Im} f(0) = f(z) - \frac{f(0)}{2} + \frac{\overline{f(0)}}{2} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(f(e^{it})\left(\frac{e^{it}+z}{2(e^{it}-z)}\right) + \overline{f(e^{it})\left(\frac{1+e^{it}\bar{z}}{2(1-e^{it}\bar{z})}\right)}\right)dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(f(e^{it})\left(\frac{e^{it}+z}{2(e^{it}-z)}\right) + \overline{f(e^{it})}\left(\frac{e^{it}+z}{2(e^{it}-z)}\right)\right)dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}(f(e^{it}))\left(\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right)dt \end{aligned}$$
Cette formule montre que la partie réelle d'une fonction holomorphe le long d'un cercle – à translation près le long de la droite imaginaire – caractérise la fonction.

(4) En ajoutant $\mathrm{Re}f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}f(e^{it})dt$ à la formule intégrale de Schwarz (point (3)), on obtient

$$f(z) - f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{2z}{e^{it}-z}\mathrm{Re}f(e^{it})dt.$$

On dérive n fois pour obtenir la dexième identité. Pour prouver la troisième, il suffit de prendre la partie réelle dans la formule intégrale de Schwarz.

□

Exercice 2. (Inégalité de Harnack)

(1) Montrer que pour tout $t \in [0, 2\pi]$ et $z \in D(0,1)$ on a

$$(1-|z|)^2 \leq |e^{it} - z|^2 \leq (1+|z|)^2.$$

(2) Soit f analytique dans $D(0, 1+\epsilon)$ pour un certain $\epsilon > 0$ et t.q. $\mathrm{Re}f(e^{it}) \geq 0$ pour tout $t \in [0, 2\pi]$. Montrer que

$$\frac{1-|z|}{1+|z|}\mathrm{Re}f(0) \leq \mathrm{Re}f(z) \leq \frac{1+|z|}{1-|z|}\mathrm{Re}f(0)\ , \qquad \forall z \in D(0,1).$$

Démonstration.

(1) On a que $|e^{it} - z|^2 = (e^{it} - z)(e^{-it} - \overline{z}) = 1 + |z|^2 - 2\mathrm{Re}(ze^{-it})$. Il suffit alors d'utiliser l'inégalité $-|w| \leq \mathrm{Re}(w) \leq |w|$ pour prouver le résultat.

(2) On borne la dernière identité du point (4) de l'exercice 1 des deux côtés en utilisant le point (1) ci-dessus et le fait que $1 - |z|^2 = (1-|z|)(1+|z|)$. On conclut en utilisant que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}f(e^{it})\mathrm{d}t = \mathrm{Re}f(0).$$

□

Exercice 3. Soit $\{a_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ et soit $f(z) = a_0 + \sum_{l=1}^{\infty} a_l z^l$ analytique dans $D(0, 1+\epsilon)$ pour un certain $\epsilon > 0$ t.q. $\mathrm{Re}f(e^{it}) \geq 0$ pour tout $t \in [0, 2\pi]$. Montrer que

$$|a_l| \leq 2\mathrm{Re}(a_0) \qquad \forall\ l \geq 1.$$

Démonstration. L'idée est de faire apparaître les coefficients a_l dans la formule intégrale de Schwarz. Pour ce faire, on utilise que

$$\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} = 1 + \frac{2z}{e^{it}-z} = 1 + \frac{2ze^{-it}}{1-ze^{-it}} = 1 + 2\sum_{n=0}^{\infty} z^{n+1}e^{-i(n+1)t}.$$

En combinant cela avec la formule intégrale de Schwarz, on obtient pour tout $z \in D(0,1)$ que

$$f(z) = i\mathrm{Im}f(0) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}f(e^{it})dt + 2\sum_{l=1}^{\infty} z^l \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ilt}\mathrm{Re}f(e^{it})dt.$$

Ainsi, on voit que $a_0 = f(0)$ et que

$$a_l = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ilt}\mathrm{Re}f(e^{it})dt.$$

On en déduit que

$$|a_l| \leq \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}f(e^{it})dt = 2\mathrm{Re}f(0) \leq 2\mathrm{Re}\, a_0,$$

comme annoncé.

□

Exercice 4.(Théorème fondamental de l'algèbre) Soit p un polynôme non constant. En étudiant le comportement de

$$\int_{|z|=R} \frac{1}{zp(z)}dz$$

quand $R \to \infty$, déduire qu'il existe un point z_* t.q. $p(z_*) = 0$.

Démonstration.

Supposons que p soit un polynôme de degré $n \geq 1$ sans racine. La fonction $\frac{1}{p(z)}$ est alors holomorphe (composition de fonctions holomorphes). Ainsi, la valeur de l'intégrale de l'énoncé est $\frac{1}{p(0)}$ par la formule de Cauchy. Cependant, l'inégalité triangulaire entraîne que $|p(z)| > |a_n||z|^n - \sum_{k=0}^{n-1}|a_k||z|^k$, qui est bornée par dessous par $\frac{|a_n|}{2}|z|^n$, pour $|z|$ assez grand. Le cercle $\{|z| = R\}$ ayant longueur $2\pi R$, on peut borner l'intégrale comme suit :

$$\left|\int_{|z|=R} \frac{1}{zp(z)} dz\right| \leq 2\pi R \max_{|z|=R} \frac{1}{|zp(z)|} \leq \frac{4\pi}{|a_n|R^n} \to 0, \quad \text{as } R \to \infty.$$

Cela entraîne que $\frac{1}{p(0)} = 0$, ce qui est impossible : le polynôme possède au moins une racine, ce qui conclut l'exercice. □

Exercice 5.

(1) Montrer qu'une fonction entière $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telle que $\frac{|f(z)|}{(1+|z|^n)}$ est borné est nécessairement un polynôme de degré $\leq n$.

(2) Montrer qu'une fonction entière $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telle que $f(z) \neq 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ et telle qu'il existe $B, C > 0$ pour lesquels $|f(z)| \leq e^{B|z|+C}$, est nécessairement de la forme $f(z) = e^{\alpha z + \beta}$, pour certains $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Démonstration.

(1) Soit $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$. Par hypothèse, il existe $B > 0$ tel que $\frac{|f(z)|}{(1+|z|^n)} < B$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Le theorème 162 du cours nous donne

$$|a_j| = \left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D_R(0)} \frac{f(z)}{z^{j+1}} dz\right| \leq R^{-j} \sup_{|z|=R} |f(z)|,$$

puis en utilisant la majoration ci-dessus,

$$\leq BR^{-j}(1 + R^n).$$

On voit alors que pour tout $j > n$, le terme de droite tend vers 0 quand $R \to \infty$, ce qui implique que $a_j = 0$ et conclut la preuve.

(2) Puisque la fonction est entière et ne s'annule pas, on peut supposer qu'il existe une fonction holomorphe g telle que $f(z) = e^{g(z)}$. La condition de l'énoncé est alors équivalente à $\operatorname{Re} g(z) \leq B|z| + C$. On veut montrer que ça ne peut pas être le cas, sauf si g est linéaire, i.e. si tous les coefficients dans sa série entière sont nuls à part a_0 et a_1.

La deuxième identité de l'exercice 1.(4) appliquée à $\tilde{g}(z) = g(zR)$ en $z = 0$ entraîne que

$$a_n R^n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 2e^{-int} \operatorname{Re} g(Re^{it}) dt.$$

Soit $A(R) = \sup_{|z|=R} \operatorname{Re} g(z)$. Puisque $\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} A(R)e^{int} dt = 0$, on peut écrire

$$|a_n|R^n \leq \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |e^{int}(\operatorname{Re} g(Re^{it}) - A(R))| dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (A(R) - \operatorname{Re} g(Re^{it})) dt = 2(A(R) - a_0).$$

Il suffit alors de prendre la limite quand $R \to \infty$ pour déduire que $|a_n| = 0$ pour tout $n \geq 2$, i.e. g est une fonction linéaire :

$$\limsup_{R\to\infty} \frac{A(R)}{R^n} = \limsup_{R\to\infty} \frac{\sup_{|z|=R} \operatorname{Re} g(z)}{R^n} \leq \limsup_{R\to\infty} \frac{B}{R^{n-1}} + \frac{C}{R^n} = 0.$$

□

Exercice 6. Trouver une fonction holomorphe $f : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \to \mathbb{C}$ bornée et non constante.

Démonstration.

On considère la détermination principale de la racine carrée $z \mapsto \sqrt{z}$ sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$: c'est une fonction holomorphe et dont l'image est le demi-plan droit $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} | \operatorname{Re}(z) > 0\}$. On envoie ce demi-plan dans le disque unité $\mathbb{D}$ grâce à l'application holomorphe sur $\mathbb{H}$ définie par $z \mapsto \frac{z-1}{z+1}$. La composition avec la racine donne $z \mapsto \frac{\sqrt{z}-1}{\sqrt{z}+1}$, qui est donc holomorphe de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ vers $\mathbb{D}$, et dont le module est donc borné par 1. □

Exercice 7. Soit $U \subset \mathbb{C}$ un domaine (ouvert connexe) tel que $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\} \subset U$. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe t.q. $f(e^{it})e^{it/2} \in \mathbb{R}$ pour tout $t \in [0, 2\pi]$. Montrer que $f \equiv 0$ sur U.

Démonstration.
On intègre $f^2(z)$ sur le bord du disque unité :

$$\int_{\partial D(0,1)} f^2(z)dz = i \int_0^{2\pi} f^2(e^{it})e^{it}dt.$$

Puisque f est holomorphe, f^2 l'est aussi, et l'intégrale ci-dessus est donc nulle. D'autre part, la condition $f(e^{it})e^{it/2} \in \mathbb{R}$ implique que $f^2(e^{it})e^{it}$ est un réel positif. La seule possibilité pour que l'intégrale d'une fonction positive soit nulle est que son intégrande est nulle. On a donc que f^2 est nulle sur le cercle unité, ce qui implique que f aussi. Ainsi, puisque f est holomorphe, elle est nulle sur tout le disque. Puis, elle est nulle sur U par Corollaire 166.

Alternativement, on peut prouver l'énoncé à l'aide du théorème de l'application ouverte (Thm 187 dans le cours), appliqué à la fonction $g : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$, $g(z) = zf^2(z)$.

En effet, supposons que le maximum global (même raisonnement avec le minimum global) de la fonction continue $\mathrm{Im}g : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ est atteint en un point z^* dans l'intérieur de $\mathbb{D}$. Ainsi, tout voisinage V contenant z^* est tel que $g(z^*)$ est sur le bord de $g(V)$. En particulier, $g(V)$ n'est pas un ouvert, ce qui contredit le théorème de l'application ouverte.

Ainsi, le maximum et le minimum globaux de $\mathrm{Im}g$ sont atteints sur $\partial\mathbb{D}$, et puisque par hypothèse, les valeurs de g sont réelles sur $\partial\mathbb{D}$, on a que $\mathrm{Im}g = 0$ sur tout $\mathbb{D}$. Ainsi, $g : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ ne prend que des valeurs réelles sur $\mathbb{D}$, ce qui implique que pour tout ouvert $V \subset \mathbb{D}$, $g(V)$ n'est pas ouvert dans $\mathbb{C}$, ce qui contredit comme précédemment le théorème de l'application ouverte.

Il suit que $g(z) = zf^2(z)$ est constante sur $\mathbb{D}$. Puisque $g(0) = 0$, on a $zf^2(z) = g(z) = 0$, et donc $f(z) = 0$. $\square$